Développement : Réduction des endomorphismes nilpotents.

RM

2022-2023

Référence :

1. 131 dvp

Énoncé :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, avec comme indice de nilpotence m.
Alors E se décompose en somme de sous-espaces cycliques et il existe $m_1 \geq ... \geq m_s$ tels que u est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} N_{m_1} & & & \\ & N_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_{m_s} \end{pmatrix}$$

avec $N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ la matrice dans $M_k(\mathbb{C})$.

Énoncé/Plan du livre :

1. On montre qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ forme un système libre de E engendrant un sous-espace F de E stable par u (cyclique). Puis on donne la matrice de u_F dans cette base.

2. On montre qu'il existe $f \in E^*$ tel que $(f, {}^tu(f), ..., {}^tu^{m-1}(f))$ forme un système libre de E^* engendrant un sous-espace dont l'orthogonal G est stable par u.

3. On conclut que E se décompose en somme directe de sous-espace cycliques.

Résolution :

1. Puisque m est l'indice de nilpotence de u, on en déduit que u^{m-1} n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{m-1}(x) = 0$. Montrons que le système $(x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ est libre. Considérons une relation de dépendance linéaire

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i u^i(x) = 0.$$

où $\lambda_0, ..., \lambda_{m-1} \in \mathbb{K}$. En prenant l'image de cette relation par u^{m-1}, tous les termes sont annulés sauf le premier, puisque $u^m = 0$ pat hypothèse. Ainsi on en déduit que $\lambda_0 u^{m-1}(x) = 0$. Cela implique $\lambda_0 = 0$ puisque $u^{m-1}(x) \neq 0$. Ce procédé permet de déduire itérativement que les coefficients $\lambda_0, ..., \lambda_{m-1}$ sont tous nuls, de sorte que le système $(x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ est libre.

Puisque $u^m = 0$, la famille $(0, x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ est stable par u, donc il en va de même pour l'espace F engendré. L'endomorphisme u induit donc un endomorphisme sur F, noté u_F. Puisque $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$, pour tout entier $i \in [\![0\,;m-2]\!]$, la matrice de u_F relativement à la base $(u^{m-1}(x), ..., u(x), x)$ de F est donnée par

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisqu'il existe $x \in E$ non nul tel que $u^{m-1}(x) \neq 0$, il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $\langle f, u^{m-1}(x)\rangle \neq 0$. Par définition de la transposition, on a donc

   $$0 \neq \langle f, u^{m-1}(x)\rangle = \langle {}^t u^{m-1}(f), x\rangle.$$

   de sorte que ${}^t u^{m-1}$ est non nul. De plus, puisque $u^m = 0$, on a ${}^t u^m = 0$. Ainsi ${}^t u$ est un endomorphisme nilpotent de E^* d'indice de nilpotence égal à m. En appliquant la même démarche qu'à la question précédente on prouve que le système $(f, {}^t u(f), ..., tu^{m-1}(f))$ est libre et que l'espace qu'il engendre est stable par ${}^t u$, autrement dit que son orthogonal pour la dualité G est stable par u.
   Puisque $dim(F) + dim(G) = n$, il suffit de prouver que $G \cap F = \{0\}$ pour prouver qu'ils sont supplémentaires. Soit $y \in G \cap F$. Puisque $y \in F$, il existe des scalaires $\lambda_0, ..., \lambda_{m-1} \in \mathbb{K}$ tels que

   $$y = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i u^i(x).$$

   De plus, puisque $u^m = 0$, on a $u^{m-1}(y) = \lambda_0 u^{m-1}(x)$. Par ailleurs, puisque $y \in G$, il est annulé par ${}^t u^{m-1}(f)$. On obtient donc

   $$\begin{aligned} 0 &= \langle {}^t u^{m-1}(f), y\rangle = \langle f, u^{m-1}(y)\rangle \\ &= \langle f, \lambda_0 u^{m-1}(x)\rangle = \lambda_0 \langle f, u^{m-1}(x)\rangle. \end{aligned}$$

   et ceci implique que $\lambda_0 = 0$ car $\langle f, u^{m-1}(x)\rangle$ n'est pas nul par définition de f (posée au début). Ce procédé permet de déduire itérativement que $\lambda_0, ..., \lambda_{m-1}$ sont tous nuls par les mêmes arguments qu'à la question précédente, donc que $y = 0$. Ainsi la somme de F et G est direct, et en particulier on en déduit que $E = F \oplus G$.

3. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$, le résultat étant immédiat en dimension 1. Supposons le résultat vrai en dimension inférieure à $n-1$ pour un certain $n \geq 1$, et prouvons le en dimension n. Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E. Par la question 1, il existe un sous-espace cyclique F stable par u. Par la question 2, il existe un supplémentaire G de F dans E stable par u. Choisissons pour F la base donnée par un système de la forme $(x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ pour un certain $x \in E$ et un $m \geq 1$. En complétant cette base par des éléments du supplémentaire G de sorte à obtenir une base de E, la matrice de u prend la forme par blocs

   $$\begin{pmatrix} N_m & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix}$$

   où N_m est la matrice définie précédemment et $N' \in M_{n-m}(\mathbb{K})$. Puisque que u est nilpotent, la matrice N' est aussi nilpotente de taille $n - m \leq n - 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors et permet de décomposer G en somme de sous-espaces cycliques pour u. Ainsi, $E = F \oplus G$ est somme de sous-espaces cycliques, ce qui termine la preuve par récurrence. Matriciellement, cela se traduit comme dans l'énoncé